Algorithmes - Solutions

I Algorithmes liés au programme de la classe de première

Du fait de l'importance du travail d'arithmétique en terminale, les algorithmes plus directement liés à la classe de première peuvent être revus, réutilisés en terminale.

I.1 Écriture en base b d'un entier donné en base 10

Entrée	Un entier naturel n et un entier $b > 1$

Traitement	Affecter à A la valeur de n
	Tant que $A > 0$
	    Afficher le reste de la division de A par b
	    Affecter à A la valeur du quotient de la division de A par b

Sortie	les « chiffres » affichés au fur et à mesure du traitement sont ceux de l'écriture de n en base b

Sur calculatrices :

Ti	Casio
Prompt N	"N" : ? $\rightarrow N$
Prompt B	"B" : ? $\rightarrow B$
$N \rightarrow A$	$N \rightarrow A$
While $A > 0$	While $A > 0$
int$(A/B) \rightarrow Q$	Intg$(A \div B) \rightarrow Q$
$A - B * Q \rightarrow R$	$A - B \times Q \rightarrow R$
$Q \rightarrow A$	$Q \rightarrow A$
Disp R	R◢
Pause	
End	WhileEnd

Sur tableur : Construire une feuille de calcul (seules les cases grisées sont à remplir) permettant d'effectuer un changement de base suivant le modèle suivant :

	A	B	C	D
1				
2		N en base 10	59	
3		Base b	2	
4				
5		N en base 2	110111	
6				
7		A	Q	R
8		59	29	1
9		29	14	1
10		14	7	0
11		7	3	1
12		3	1	1
13		1	0	1
14				

I.2 Liste des diviseurs positifs d'un entier

Résolution de l'exercice 1.

Entrée	a un entier naturel non nul
Traitement	Tester un à un les entiers plus petits que a, les afficher lorsqu'ils divisent a
Sortie	les diviseurs de l'entier a

Entrée	a un entier naturel non nul
Traitement	Pour i prenant successivement les valeurs entières de 1 et a si $E\left(\frac{a}{i}\right)=\frac{a}{i}$ alors afficher i
Sortie	les diviseurs de l'entier a

Sur calculatrices :

Ti	Casio
Prompt A	"A": ? $\longrightarrow A$
For(I,1,A)	For 1 $\longrightarrow I$ To A
If int$(A/I)=A/I$	If Intg$(A \div I)=A \div I$
Then	Then I◢
Disp I	
End	IfEnd
End	Next
Disp "Fin"	"Fin"

Résolution de l'exercice 2.

Algo :

Entrée	un entier naturel $a>1$
Traitement	Pour u prenant les valeurs entières de 1 à $\sqrt{a}$ si u divise a alors afficher u et $v=\frac{a}{u}$
Sortie	faite au fur et à mesure du traitement

Entrée	un entier naturel $a>1$
Traitement	Pour u prenant les valeurs entières de 1 à $\sqrt{a}$ si $E\left(\frac{a}{u}\right)=\frac{a}{u}$ alors afficher u et $\frac{a}{u}$
Sortie	faite au fur et à mesure du traitement

Ti	Casio
Prompt A	"A" : ? $\rightarrow A$
For(U, 1, int($\sqrt{(A)}$))	For 1 $\rightarrow U$ To Intg($\sqrt{A}$)
If int(A/U)=A/U	If Intg(A÷U)=A÷U
Then	Then U◢
Disp U	
Disp A/U	A÷U◢
Disp " "	" "
Pause	
End	IfEnd
End	Next

I.3 Diviseurs communs et pgcd

Résolution de l'exercice 3.

Algo :

Entrée	a, b deux entiers naturels non nuls
Traitement	Pour i prenant successivement les valeurs entières de 1 et a si $E\left(\frac{a}{i}\right)=\frac{a}{i}$ et $E\left(\frac{b}{i}\right)=\frac{b}{i}$ alors afficher i
Sortie	$\mathscr{D}_a \cap \mathscr{D}_b$, faite au fur et à mesure du traitement

Sur calculatrices :

Ti	Casio
Prompt A,B	“A”: ? $\longrightarrow A$
	“B”: ? $\longrightarrow B$
For(I,1,A)	For 1 $\longrightarrow I$ To A
If int$(A/I) = A/I$ and int$(B/I) = B/I$	If Intg$(A \div I) = A \div I$
Then	Then If Intg$(B \div I) = B \div I$
Disp I	Then I◢
End	IfEnd
	IfEnd
End	Next

Résolution de l’exercice 4.

Amélioration possible :

Entrée	a, b deux entiers naturels non nuls
Traitement	Si $a > b$ alors affecter la valeur de b à c sinon affecter la valeur de a à c Pour i prenant successivement les valeurs entières de 1 et c si $E\left(\frac{a}{i}\right) = \frac{a}{i}$ et $E\left(\frac{b}{i}\right) = \frac{b}{i}$ alors afficher i
Sortie	$\mathscr{D}_a \cap \mathscr{D}_b$, faite au fur et à mesure du traitement

□

Résolution de l’exercice 5.

Algo :

Entrée	a, b deux entiers naturels non nuls

Traitement	affecter à g la valeur 1
	Pour i prenant successivement les valeurs entières entre 2 et a
	    si $E\left(\frac{a}{i}\right) = \frac{a}{i}$ et $E\left(\frac{b}{i}\right) = \frac{b}{i}$ alors
	        si $i > g$ alors affecter la valeur i à g

Sortie	Afficher la valeur de g

Sur calculatrices :

Ti	Casio
Prompt A,B	“A”: ? $\longrightarrow A$
	“B”: ? $\longrightarrow B$
$1 \to G$	$1 \to G$
For(I,2,A)	For 2 $\longrightarrow I$ To A
If int$(A/I) = A/I$ and int$(B/I) = B/I$ and $I > G$	If Intg$(A \div I) = A \div I$
Then	Then If Intg$(B \div I) = B \div I$
$I \to G$	Then If $I > G$
	Then $I \to G$
End	IfEnd
	IfEnd
	IfEnd
End	Next
Disp G	G

I.4 Algorithme d'Euclide

Algorithme d'Euclide	
Entrée	a et b deux entiers (non nuls)

Traitement	affecter à r le reste de la division euclidienne de a par b
	Tant que $r > 0$
	    affecter à a la valeur de b
	    affecter à b la valeur de r
	    affecter à r le reste dans la division de a par b

Sortie= pgcd$(a; b)$	la dernière valeur non nulle de r, c'est à dire la dernière valeur affectée à b

Sur calculatrices :

Ti	Casio
Prompt A,B $A - \text{int}(A/B) * B \to R$	"A" : ? $\to A$ "B" : ? $\to B$ $A - \text{Intg}(A \div B) \times B \to R$
While $R > 0$ $B \to A$ $R \to B$ $A - \text{int}(A/B) * B \to R$ End Disp B	While $R > 0$ $B \to A$ $R \to B$ $A - \text{Intg}(A \div B) \times B \to R$ WhileEnd B

Sur tableur : Construire une feuille de calcul (seules les cases grisées sont à remplir) permettant de calculer le PGCD de deux entiers suivant le modèle suivant :

	A	B	C	D
1				
2		**PGCD**	**3**	
3				
4		**A**	**B**	**R**
5		627	18	15
6		18	15	3
7		15	3	0
8		3	0	
9				

Résolution de l'exercice 6.

Principe :

Entrée	les deux entiers naturels a et b
Traitement	Appliquer l'algorithme d'Euclide Lister les diviseurs du dernier reste non nul

Sur calculatrices :

Ti	Casio
Prompt A,B $A - \text{int}(A/B) * B \to R$	"A" : ? $\to A$ "B" : ? $\to B$ $A - \text{Intg}(A \div B) \times B \to R$
While $R > 0$ $B \to A$ $R \to B$ $A - \text{int}(A/B) * B \to R$ End	While $R > 0$ $B \to A$ $R \to B$ $A - \text{Intg}(A \div B) \times B \to R$ WhileEnd
For(U, 1, int($\sqrt{(B)}$)) If int(B/U)=B/U Then Disp U Disp B/U Disp " " Pause End End	For $1 \to U$ To Intg($\sqrt{B}$) If Intg(B÷U)=B÷U Then U◢ B÷U◢ " " IfEnd Next

I.5 Factorisation d'un entier en facteurs premiers

Décompose	
Entrée	un entier $n > 1$

Traitement	affecter la valeur n à a
	Pour d prenant les valeurs entières de 2 à $E\left(\frac{n}{2}\right)$
	    Tant que d divise a
	        afficher la valeur de d
	        affecter à a la valeur de $\frac{a}{d}$

Ti	Casio
Prompt N	"N" : ? $\to N$
$N \to A$	$N \to A$
For(D,2,int(N/2))	For $2 \to D$ To Intg($N \div 2$)
While int$(A/D) = A/D$	While Intg$(A \div D) = A \div D$
Disp D	D◢
Pause	
$A/D \to A$	$A \div D \to A$
End	WhileEnd
End	Next

I.6 Travail sur le système décimal

Résolution de l'exercice 7.

1. $1000 \times \overline{xyz} + \overline{xyz}$
2.

Entrée	N un entier naturel de trois chiffres
Traitement	affecter à N la valeur $1000N + N$ affecter à N la valeur $N/7$ affecter à N la valeur $N/11$ affecter à N la valeur $N/13$
Sortie	Afficher la valeur de N

Ti	commentaire	Casio
Input "N ? ", N	affichage du message « N ? » puis attente d'un nombre $\overline{xyz}$ qui sera mis en mémoire N	"N" :?$\rightarrow N$
$1000 * N + N \rightarrow N$	on stocke $\overline{xyzxyz}$ dans la mémoire N	$1000 \times N + N \rightarrow N$
$N/7 \rightarrow N$	on stocke $\dfrac{N}{7}$ dans la mémoire N	$N \div 7 \rightarrow N$
$N/11 \rightarrow N$	on stocke $\dfrac{N}{11}$ dans la mémoire N	$N \div 11 \rightarrow N$
$N/13 \rightarrow N$	on stocke $\dfrac{N}{13}$ dans la mémoire N	$N \div 13 \rightarrow N$
Disp N	affichage du résultat	N

3. $\overline{xyzxyz} = 1000 \times \overline{xyz} + \overline{xyz} = 1001 \times \overline{xyz} = 7 \times 11 \times 13\ \overline{xyz}$
   Le dernier quotient est donc le nombre à trois chiffres de départ. □

Résolution de l'exercice 8.

1. (a) $N = 27$, $U = 7$, $A = 2$, $C = 100A(A + 1) + 25 = 625$.
   (b) $N = 129$, $U = 9$, $A = 12$, $C = 15625$
   (c) Sur calculatrice :

Ti	Casio
Prompt N $N \rightarrow U$ While $U \geqslant 10$ $U - 10 \rightarrow U$ End $(N - U)/10 \rightarrow A$ $A * (A + 1) * 100 + 25 \rightarrow C$ Disp C	"N" : ? $\rightarrow N$ $N \rightarrow U$ While $U \geqslant 10$ $U - 10 \rightarrow U$ WhileEnd $(N - U) \div 10 \rightarrow A$ $A \times (A + 1) \times 100 + 25 \rightarrow C$ C

   (d) $A\,(A + 1)$ est le nombre des centaines de C.
   L'algorithme peut donc se décrire ainsi :

Entrée	un entier N de nombre des dizaines A
Sortie	un entier C de $A(A + 1)$ centaines et 25 unités

2. (a) $N = 10a + 5$ donc $N^2 = (10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a\,(a + 1) + 25$ CQFD
   (b) Pour $N_1 = 45$, on a $A = 4$, $C = 4 \times 5 \times 100 = 2000$ d'où $N_1^2 = 2025$. □

I.7 Probabilités et simulations

Résolution de l'exercice 9.

Expérience aléatoire : jeter un dé, noter la face obtenue. Distribution des fréquences sur un échantillon de taille 1000.□

Résolution de l'exercice 10.

1. Sur un échantillon de N lancers de deux dés, A fréquence des sommes 6, B fréquence des sommes 7.
2. Sur calculatrice :

Ti		Casio
Input "N ?", N	N : nombre de lancers des deux dés	?$\to N$
$0 \to A$ $0 \to B$	mise à 0 du compteur de 6 mise à 0 du compteur de 7	$0 \to A$ $0 \to B$
For(J,1,N) randInt(1,6)+randInt(1,6)$\to S$ If S=6 Then $A+1 \to A$ End If S=7 Then $B+1 \to B$ End End	on lance les deux dés on incrémente le compteur de 6 on incrémente le compteur de 7	For $1 \to J$ To N Intg(6× Ran# +1)+Intg(6× Ran# +1)$\to S$ If S=6 Then $A+1 \to A$ IfEnd If S=7 Then $B+1 \to B$ IfEnd Next
$A/N \to A$ $B/N \to B$	on remplace les effectifs par les fréquences	$A \div N \to A$ $B \div N \to B$
Disp "Six", A Disp "Sept", B		"Six" A◢ "Sept " B

Algorithme pour lancer les deux dés et récolter la distrib complète des fréquences :

Entrée	un entier N
Traitement	Pour i prenant successivement les affecter à f_i la valeur 0
	Pour j prenant successivement le lancer deux dés et affecter affecter à f_S la valeur $f_S +$
	Pour i prenant successivement les affecter à f_i la valeur $\dfrac{f_i}{N}$
Sortie	Pour i prenant successivement les afficher la valeur de f_i

Mise en oeuvre sur calculatrices :

Ti		Casio
		Entrer « à la main » 12 zéros dans la liste 1 (menu LIST)
Input "N ?", N	N : nombre de lancers des deux dés	?$\to N$
For(I,2,12) $0 \to L_1(I)$ End	mise à zéro des éléments de la liste 1	Fill(0, List 1)
For(J,1,N) randInt(1,6)+randInt(1,6)$\to S$ $L_1(S)+1 \to L_1(S)$ End	on lance les deux dés on incrémente l'élément de liste correspondant	For $1 \to J$ To N Intg(6× Ran# +1)+Intg(6× Ran# +1)$\to S$ List 1[S]+1 $\to$List 1[S] Next
For(J,2,12) $L_1(J)/N \to L_1(J)$ End	calcul des fréquences	For $2 \to J$ To 12 List 1[J] $\div$ N $\to$ List 1[J] Next
Afficher la liste L_1 (menu stat) après exécution du programme		Afficher la liste 1 (menu LIST) après exécution du programme

Résolution de l'exercice 11.

1.

2. 0 correspond à PP, 1 à FP, 2 à FF.
3.
4.
5. La loi suivante semble plus adaptée :

Issues	PP	FP	FF
Probabilités	0,25	0,5	0,25

6. Si on distingue les deux pièces (en en peignant une en rouge et l'autre en vert par exemple), on comprend que « Pile rouge, Face vert » et « Pile vert, Face rouge » font deux issues alors que « Pile rouge, Pile vert » et « Pile vert, Pile rouge » fait une seule issue. On est donc amené à modéliser l'expérience soit par la loi :

Issues	PP	FP	FF
Probabilités	0,25	0,5	0,25

soit (en changeant d'univers) par la loi équirépartie :

Issues	PP	FP	PF	FF
Probabilités	0,25	0,25	0,25	0,25

(si nos deux pièces sont identiques, pour effectuer un décompte distinguant FP et PF, on peut par exemple lancer une pièce puis l'autre).

7.

Entrée	un entier naturel N (non nul)	
Traitement	affecter 0 à la mémoire M affecter 0 à la mémoire P affecter 0 à la mémoire F	M comptera les issues « mixtes » PF P comptera les issues PP F comptera les issues FF
	Pour i prenant successivement les valeurs entières de 1 à N Choisir 0 ou 1 au hasard deux fois de suite et affecter à S la somme des deux tirages Si $S = 0$ affecter la valeur $P + 1$ à P Si $S = 1$ affecter la valeur $M + 1$ à M Si $S = 2$ affecter la valeur $F + 1$ à F	
	affecter la valeur P/N au compteur P affecter la valeur M/N au compteur M affecter la valeur F/N au compteur F	on remplace les effectifs par les fréquences
Sortie	Afficher les valeurs de P, M, F	

Ti	Casio
Input “N ?”, N	“N” : ? $\to N$
$0 \to P$ $0 \to M$ $0 \to F$	$0 \to P$ $0 \to M$ $0 \to F$
For(I,1,N) randInt(0,1)+randInt(0,1)$\to S$ If S=0 Then $P+1 \to P$ End If S=1 Then $M+1 \to M$ End If S=2 Then $F+1 \to F$ End End	For 1$\to I$ To N Intg($2 \times Ran\#$) + Intg($2 \times Ran\#$) $\to S$ If S=0 Then $P+1 \to P$ IfEnd If S=1 Then $M+1 \to M$ IfEnd If S=2 Then $F+1 \to F$ IfEnd Next
Disp “PP”, P/N Disp“PF”, M/N Disp “FF”, F/N	“PP” P/N◢ “PF” M/N◢ “FF” F/N

Résolution de l’exercice 12.

1. Programme calculatrice :

Entrée	N entier naturel non nul (nb de courses)

Traitement	Affecter 0 à L (compteur de victoires du lièvre)
	Affecter 0 à T (compteur de victoires de la tortue)
	Répéter N fois :
	    affecter 0 à C (compteur avancée tortue)
	    affecter 0 à D (le dé)
	    Tant que $D \neq 6$ et $C \neq 6$:
	        jeter le dé et affecter le résultat à D
	        Incrémenter le compteur C
	    Si $D = 6$ incrémenter L sinon incrémenter T

Sortie	Afficher $\dfrac{L}{N}$ et $\dfrac{T}{N}$

Ti	Casio
Prompt N	"N" : ? $\to N$
$0 \to L$	$0 \to L$
$0 \to T$	$0 \to T$
For(I,1,N)	For $1 \to I$ To N
$0 \to D$	$0 \to D$
$0 \to C$	$0 \to C$
While $D \neq 6$ and $C \neq 6$	While $D \neq 6$
randInt(1,6)→D	Intg($6 \times Ran\# + 1) \to D$
$C+1 \to C$	$C+1 \to C$
End	WhileEnd
If $D = 6$	If $D = 6$
Then	Then $L+1 \to L$
$L+1 \to L$	
Else	Else $T+1 \to T$
$T+1 \to T$	
End	IfEnd
End	Next
Disp T/N	$T \div N$ ◢
Disp L/N	$L \div N$

2. cf feuille lievreETtortue.ods
3. $6^6 = 46\,656$
4. $5^6 = 15\,625$
5. P(« la tortue gagne »)=$\dfrac{15625}{46656} \approx 0{,}335$

   P(« le lièvre gagne »)=$\dfrac{46656 - 15625}{46656} \approx 0{,}665$ □

II Les suites

Intérêt des algorithmes de sommation comme premiers algorithmes :
- Algorithme court, faisant intervenir des boucles.
- modification d'une ou deux instructions d'un exo à l'autre (modif du terme à ajouter, modif du début de boucle notamment) qui oblige les élèves à « s'approprier » l'algorithme.
- Les suites arithmético-géométriques (exemple plus loin tiré d'annales du bacc) : on peut conjecturer la limite avant de faire des calculs plus théoriques.

II.1 Somme de termes d'indices consécutifs d'une suite arithmétique

Résolution de l'exercice 13.

1.
2.
3. Programmation :

Ti	"En français"	Casio
Input "M ? ",M	Demande une valeur pour M	"M" : ?→M
$0 \to S$	Initialiser la mémoire S à 0	$0 \to S$
For(I,1,M) $S + (5 * I + 8) \to S$ End	Pour I prenant toutes les valeurs entières de 1 à M ajouter I à la mémoire S Fin de la boucle	For $1 \to I$ To M $S + (5 \times I + 8) \to S$ Next
Disp S	Affichage du contenu de la mémoire S	S

4. $S_{100} = 26\,058$.
5.

6. Algorithme :

Entrée	raison r et premier terme u_0
Traitement	Pour i prenant successivement les valeurs entières de 0 à 100 │ Afficher $(u_0 + r \times i) + (u_0 + r \times (100 - i))$
Sortie	la sortie est effectuée au fur et à mesure du traitement

7. Calculatrice :

Ti	Casio
Prompt R Prompt U	"R " : ? $\rightarrow R$ "U " : ? $\rightarrow U$
For(I,0,100) Disp $(U + R * I) + (U + R * (100 - i))$ Pause End	For $0 \rightarrow I$ To 100 $(U + R \times I) + (U + R \times (100 - i))$◢ Next

8. $u_i + u_{100-i} = (u_0 + r \times i) + (u_0 + (100 - i)\, r) = u_0 + u_0 + 100r = u_0 + u_{100}$.
9.
10. Tableur :

	colonne A	colonne B	colonne C
ligne 1			0
ligne 2	0	$= 5 * A2 + 8$	$= B2 + C1$
ligne 3	1	$= 5 * A3 + 8$	$= B3 + C2$
ligne 4	2	$= 5 * A4 + 8$	$= B4 + C3$
ligne 5	3	$= 5 * A5 + 8$	$= B5 + C4$
⋮	⋮	⋮	⋮

ou

	colonne A	colonne B	colonne C
ligne 1			0
ligne 2	0	8	$= B2 + C1$
ligne 3	1	$= B2 + 5$	$= B3 + C2$
ligne 4	2	$= B3 + 5$	$= B4 + C3$
ligne 5	3	$= B4 + 5$	$= B5 + C4$
⋮	⋮	⋮	⋮

cf fichier Open Office Calc « somme5n+8.ods ». □

Résolution de l'exercice 14.

1. Objectif de cette première question : rappel de l'écriture d'un entier impair.
   Différence : aucune !
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$ (termes en progression arithmétique, raison 2).
3. Sur calculatrices :

Ti	Casio
Prompt M $1 \rightarrow C$ $1 \rightarrow I$ $1 \rightarrow S$ While $S \leqslant M$ $I + 2 \rightarrow I$ $C + 1 \rightarrow C$ $S + I \rightarrow S$ End Disp $C - 1$	"M" : ? $\rightarrow M$ $1 \rightarrow C$ $1 \rightarrow I$ $1 \rightarrow S$ While $S \leqslant M$ $I + 2 \rightarrow I$ $C + 1 \rightarrow C$ $S + I \rightarrow S$ WhileEnd $C - 1$

La sortie est $E\left(\sqrt{M}\right)$.
Justification :
En entrée ou en sortie de boucle, S est la somme des C premiers entiers impairs. Soit c la dernière valeur prise par C. On a :

$$\sum_{j=1}^{c-1}(2j-1) \leqslant M < \sum_{j=1}^{c}(2j-1)$$

ou

$$(c-1)^2 \leqslant M < (c)^2$$

ou encore

$$c-1 \leqslant \sqrt{M} < c$$

4. Sur calculatrices :

Ti	Casio
Prompt M $1 \to I$ $1 \to S$ While $S \leqslant M$ $I+2 \to I$ $S+I \to S$ End Disp $(I-1)/2$	"M" : ? $\to M$ $1 \to I$ $1 \to S$ While $S \leqslant M$ $I+2 \to I$ $S+I \to S$ WhileEnd $(I-1) \div 2$

La sortie est $E\left(\sqrt{M}\right)$.
Soit i la dernière valeur prise par I. On a :

$$(1+3+5+\cdots+(i-2)) \leqslant M < (1+3+5+\cdots+i)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\sum_{j=1}^{\frac{i-1}{2}}(2j-1) \leqslant M < \sum_{j=1}^{\frac{i+1}{2}}(2j-1)$$

ou

$$\left(\frac{i-1}{2}\right)^2 \leqslant M < \left(\frac{i+1}{2}\right)^2$$

ou encore

$$\frac{i-1}{2} \leqslant \sqrt{M} < \frac{i+1}{2}$$

$\dfrac{i-1}{2} = c-1.$ □

II.2 Somme de termes d'indices consécutifs d'une suite géométrique

Résolution de l'exercice 15.

1. Algorithme :

Entrée	La raison q d'une suite géométrique u et son premier terme u_0
Traitement	Pour i prenant successivement les valeurs entières de 0 à 15 Afficher $\left(u_0 \times q^i\right) + \left(u_0 \times q^{(100-i)}\right)$
Sortie	la sortie est effectuée au fur et à mesure du traitement

2. Calculatrice :

Ti	Casio
Prompt Q Prompt U	"Q" : ?→ Q "U" : ?→ U
For(I,0,15) Disp $(U * Q\hat{}i) + (U * Q\hat{}(15 - i))$ Pause End	For $0 \rightarrow I$ To 15 $(U \times Q\hat{}i) + (U \times Q\hat{}(15 - i))$ ◢ Next

$u_0 + u_n = u_0 + u_0\, q^n$, $u_i + u_{n-i} = u_0\, q^i + u_0\, q^{n-i} = u_0\left(q^i + q^{n-i}\right)$. Pas d'égalité. . . □

Résolution de l'exercice 16.

1. Algorithme : □

Traitement	affecter la valeur 1 à N
	affecter la valeur 1600 à A Affecter la valeur 1600 à B

	Tant que $B \leqslant A$
	  affecter la valeur $N+1$ à N
	  affecter la valeur $A+10$ à A
	  affecter la valeur $1{,}006 \times B$ à B

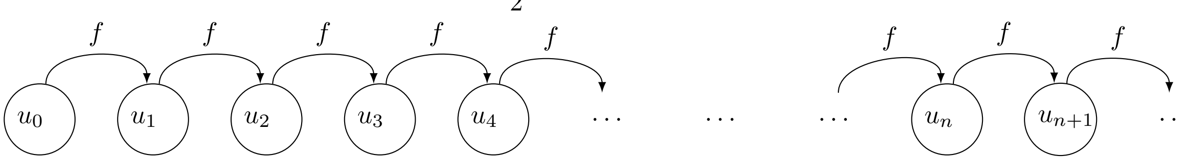
Sortie	afficher la valeur de N

Ti	Casio
$1 \rightarrow N$ $1600 \rightarrow A$ $1600 \rightarrow B$	$1 \rightarrow N$ $1600 \rightarrow A$ $1600 \rightarrow B$
While $B \leqslant A$ $N+1 \rightarrow N$ $A+10 \rightarrow A$ $1.006 * B \rightarrow B$ End	While $B \leqslant A$ $N+1 \rightarrow N$ $A+10 \rightarrow A$ $1.006 \times B \rightarrow B$ WhileEnd
Disp N	N

II.3 Limite d'une suite géométrique : quelques annales du bacc

Résolution de l'exercice 17.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 5$. Construction de la suite u :



1. Algorithme.

Entrée	un entier naturel n
Traitement	Affecter la valeur 8 à U Pour i prenant successivement les valeurs entières de 1 à n affecter la valeur $\dfrac{1}{2}U - 5$ à U
Sortie	Afficher la valeur de U

TI	Casio
Prompt N	“N” : ?→ N
$8 \to U$	$8 \to U$
For(I,1,N)	For $1 \to I$ To N
$0{,}5 * U - 5 \to U$	$0{,}5 \times U - 5 \to U$
End	Next
Disp U	U

Remarque : dans le descriptif de l'algorithme, la sortie est à décrire par « la valeur de u_n » et non seulement par « Sortie : u_n » , car il y a là pb conflictuel entre la question math : « donner u_n (en fonction de ...) » qui demande une formule et u_n sur machine qui sera une valeur numérique (mais qui pourrait être une formule avec un logiciel plus évolué, comme un logiciel de calcul formel ...).
On peut même se demander si avec un descriptif de sortie : « afficher U » , la réponse « Disp “U” » ne serait pas aussi légitime que « Disp U » .

2. La suite semble converger vers -10.

Résolution de l'exercice 18.

1. Algorithme.

Entrée	un entier naturel n
Traitement	Affecter la valeur $\frac{1}{9}$ à A Pour i prenant successivement les valeurs entières de 2 à n affecter la valeur $\frac{8}{9}A + \frac{1}{9}$ à A
Sortie	Afficher A

2. Calculatrice.

TI	Casio
Prompt N	“N” : ?→ N
$1/9 \to A$	$1 \div 9 \to A$
For(I,2,N)	For $2 \to I$ To N
$(8/9) * A + 1/9 \to A$	$(8 \div 9) \times A + 1 \div 9 \to A$
End	Next
Disp A	A

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = 1$.
4. Tracer un segment quelconque dans le carré (qu'on peut voir comme un rectangle de largeur 0). Enlever 10, 100, 1000 segments et vous aurez toujours une aire de 1m^2 !

Résolution de l'exercice 19.

1. Sur calculatrices :

Ti	Casio
Prompt N	“N” : ? $\to N$
$0 \to S$	$0 \to S$
For(I,1,N) $S + 50 * 0{,}99\hat{}(I-1) \to S$ End	For $1 \to I$ To N $S + 50 \times 0{,}99\hat{}(I-1) \to S$ Next
Disp S	S

2. Algorithme.

Entrée	un nombre réel D $(0 < D < 5000)$

Traitement	Affecter la valeur 1 à N
	Affecter la valeur 50 à L
	Tant que $L < D$
	    affecter la valeur $N + 1$ à N
	    Affecter la valeur $L + 50 \times 0{,}99^{N-1}$ à L

Sortie	Afficher la valeur de N

Calculatrices.

Ti	Casio
Prompt D	“D” : ?→ D
$1 \to N$ $50 \to L$	$1 \to N$ $50 \to L$
While $L < D$ $N+1 \to N$ $L + 50 * 0.99\hat{}(N-1) \to L$ End	While $L < D$ $N+1 \to N$ $L + 50 \times 0.99\hat{}(N-1) \to L$ WhileEnd
Disp N	N

$L_n = 5\,000 \times (1 - 0{,}99^n)$

$L_{847} \approx 4\,998{,}995$, $L_{848} \approx 4\,999{,}005$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = 5\,000$.

III Récurrence

Voir aussi l'exercice **??**.

Résolution de l'exercice 20.

1. Exécution programme :

i	S
	0
1	$1^2 = 1$

et $u(1) = 1$.

2. Exécution programme :

i	S
	0
1	1^2
2	$1 + 2^2 = 5$

et $u(2) = 5$.

3. Exécution programme :

i	S
	0
1	1^2
2	$1^2 + 2^2 = 5$
$\vdots$	$\vdots$
j	$u(j)$
$j+1$	$u(j) + (j+1)^2$

On cherche à vérifier que $u(j+1) = u(j) + (j+1)^2$.

$$u(j+1) - u(j) = \frac{1}{6}(j+1)((j+1)+1)(2(j+1)+1) - \frac{1}{6}j(j+1)(2j+1) = \cdots = (j+1)^2 \qquad \square$$

4. Déroulement :

i	S
	0
1	$S = 1^2 = u(1)$
2	$S = 1^2 + 2^2 = u(2)$
$\vdots$	$\vdots$
j	$S = 1^2 + 2^2 + \cdots + j^2 = u(j)$
$j+1$	$S = 1^2 + 2^2 + \cdots + j^2 + (j+1)^2 = u(j+1)$
$\vdots$	$\vdots$
1000	$S = 1^2 + 2^2 + \cdots + 1000^2 = u(1000)$

d'où $1^2 + 2^2 + \cdots + 1000^2 = \frac{1}{6} \times 1000 \times 1001 \times 2001$.

5. Calculatrices :

Ti	Casio
$0 \to S$	$0 \to S$
For(I,1,1000) $S + I^2 \to S$ End	For $1 \to I$ To 1000 $S + I^2 \to S$ Next
Disp S	S

Résolution de l'exercice 21.

1. Calculatrices.

Ti	"En français"	Casio
Input "M ? ",M	Demande une valeur pour M	"M" : ?→M
$0 \to S$	Initialiser la mémoire S à 0	$0 \to S$
For(I,1,M) $S + I^2 \to S$ End	Pour I prenant toutes les valeurs entières de 1 à M ajouter I à la mémoire S Fin de la boucle	For $1 \to I$ To M $S + I^2 \to S$ Next
Disp S	Affichage du contenu de la mémoire S	S

2. Récurrence. L'idée intervenant dans la programmation de S est la même que celle qui consiste à écrire $S_{m+1} = S_m + (m+1)^2$. Peut-être est ce là pour un ou deux élèves une aide à la compréhension ? □

IV La division euclidienne

IV.1 Calcul d'un quotient de division

Résolution de l'exercice 22.
Algorithme :

Entrée	a un réel positif, b un réel strictement positif
Initialisation	donner à q la valeur initiale 0 donner à m la valeur initiale b
Traitement	Tant que $m \leqslant a$ affecter à q la valeur $q + 1$ affecter à m la valeur $m + b$
Sortie	Afficher la valeur de q

Ti	Casio
Input "A ?",A	"A" : ?$\longrightarrow A$
Input "B ?",B	"B" : ?$\longrightarrow B$
$0 \longrightarrow Q$	$0 \longrightarrow Q$
$B \longrightarrow M$	$B \longrightarrow M$
While $M \leqslant A$	While $M \leqslant A$
$Q + 1 \longrightarrow Q$	$Q + 1 \longrightarrow Q$
$M + B \longrightarrow M$	$M + B \longrightarrow M$
End	WhileEnd
Disp Q	Q

Résolution de l'exercice 23.
Sortie : afficher la valeur de $q - 1$. □

Résolution de l'exercice 24.
Lorsque m peut prendre la valeur a, c'est à dire lorsque b s'écrit ka avec k entier. □

IV.2 Calcul du reste

Résolution de l'exercice 25.

1. Algorithme :

Entrée	a un réel positif, b un réel strictement positif
Traitement	donner à q la valeur initiale 0 donner à m la valeur initiale b
	Tant que $m \leqslant a$ affecter à q la valeur $q+1$ affecter à m la valeur $m+b$ Fin de la boucle tant que
	affecter à r la valeur $a-b\times q$
Sortie	Afficher la valeur de r

Ti	Casio
Input "A ?",A Input "B ?",B	"A" : ?$\longrightarrow A$ "B" : ?$\longrightarrow B$
$0 \longrightarrow Q$ $B \longrightarrow M$	$0 \longrightarrow Q$ $B \longrightarrow M$
While $M \leqslant A$ $Q+1 \longrightarrow Q$ $M+B \longrightarrow M$ End	While $M \leqslant A$ $Q+1 \longrightarrow Q$ $M+B \longrightarrow M$ WhileEnd
$A-B*Q \to R$	$A-B\times Q \to R$
Disp R	R

2. Algorithme :

Entrée	a un réel positif, b un réel strictement positif
Traitement	donner à r la valeur initiale a
	Tant que $r \geqslant b$ affecter à r la valeur $r-b$ Fin de la boucle tant que
Sortie	Afficher la valeur de r

Ti	Casio
Input "A ?",A Input "B ?",B	"A" : ?$\longrightarrow A$ "B" : ?$\longrightarrow B$
$A \longrightarrow R$	$A \longrightarrow R$
While $R \geqslant B$ $R-B \longrightarrow R$ End	While $R \geqslant B$ $R-B \longrightarrow R$ WhileEnd
Disp R	R

IV.3 Algorithme de division euclidienne

Résolution de l'exercice 26.

1. Algorithme :

Entrée	$a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$
Traitement	donner à q la valeur initiale 0 donner à m la valeur initiale b

	Tant que $m \leqslant a$
	    affecter à q la valeur $q+1$
	    affecter à m la valeur $m+b$
	Fin de la boucle tant que

	affecter à r la valeur $a - b \times q$
Sortie	Afficher la valeur de q et la valeur de r

Ti	Casio
Input “A ?”,A Input “B ?”,B	“A” : ?$\longrightarrow A$ “B” : ?$\longrightarrow B$
$0 \longrightarrow Q$ $B \longrightarrow M$	$0 \longrightarrow Q$ $B \longrightarrow M$
While $M \leqslant A$ $Q+1 \longrightarrow Q$ $M+B \longrightarrow M$ End	While $M \leqslant A$ $Q+1 \longrightarrow Q$ $M+B \longrightarrow M$ WhileEnd
$A - B * Q \rightarrow R$	$A - B \times Q \rightarrow R$
Disp Q Disp R	Q◢ R

2. Algorithme :

Version 1	
Entrée	$a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$
Traitement	donner à r la valeur initiale a
	Tant que $r \geqslant b$ affecter à r la valeur $r - b$ Fin de la boucle tant que
	Affecter à q la valeur $\dfrac{a-r}{b}$
Sortie	Afficher la valeur de q et la valeur de r

Version 2	
Entrée	$a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$
Traitement	donner à r la valeur initiale a donner à q la valeur initiale 0

	Tant que $r \geqslant b$
	    affecter à r la valeur $r - b$
	    affecter à q la valeur $q+1$
	Fin de la boucle tant que

Sortie	Afficher la valeur de q et la valeur de r

Version 1	
Ti	Casio
Input “A ?”,A Input “B ?”,B	“A” : ?$\longrightarrow A$ “B” : ?$\longrightarrow B$
$A \longrightarrow R$	$A \longrightarrow R$
While $R \geqslant B$ $R - B \longrightarrow R$ End	While $R \geqslant B$ $R - B \longrightarrow R$ WhileEnd
$(A-R)/B \rightarrow Q$	$(A-R) \div B \rightarrow Q$
Disp Q Disp R	Q◢ R

Version 2	
Ti	Casio
Input “A ?”,A Input “B ?”,B	“A” : ?$\longrightarrow A$ “B” : ?$\longrightarrow B$
$A \longrightarrow R$ $0 \rightarrow Q$	$A \longrightarrow R$ $0 \rightarrow Q$
While $R \geqslant B$ $R - B \longrightarrow R$ $Q+1 \rightarrow Q$ End	While $R \geqslant B$ $R - B \longrightarrow R$ $Q+1 \rightarrow Q$ WhileEnd
Disp Q Disp R	Q◢ R

3. Avec la fonction $E(.)$:

Entrée	a un entier naturel, b un entier naturel
Traitement	donner à q la valeur $E\left(\dfrac{a}{b}\right)$ donner à r la valeur $a - bq$
Sortie	Afficher la valeur de q et la valeur de r

Ti	Casio
Input “A ?”,A	“A” : ?$\longrightarrow A$
Input “B ?”,B	“B” : ?$\longrightarrow B$
$int(A/B) \longrightarrow Q$	$Intg(A \div B) \longrightarrow Q$
$A - B * Q \longrightarrow R$	$A - B \times Q \longrightarrow R$
Disp Q	Q◢
Disp R	R

Résolution de l'exercice 27.

Algorithme :

Entrée	$a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$
Traitement	donner à q la valeur initiale 0 donner à m la valeur initiale b
	Tant que $m \leqslant a$ affecter à q la valeur $q+1$ affecter à m la valeur $m+b$ Fin de la boucle tant que
	affecter à r la valeur $a-(m-b)$
Sortie	Afficher la valeur de q et la valeur de r

Ti	Casio
Input "A ?",A Input "B ?",B	"A" : ?$\longrightarrow A$ "B" : ?$\longrightarrow B$
$0 \longrightarrow Q$ $B \longrightarrow M$	$0 \longrightarrow Q$ $B \longrightarrow M$
While $M \leqslant A$ $Q+1 \longrightarrow Q$ $M+B \longrightarrow M$ End	While $M \leqslant A$ $Q+1 \longrightarrow Q$ $M+B \longrightarrow M$ WhileEnd
$A-M+B \to R$	$A-M+B \to R$
Disp Q Disp R	Q◢ R

□

Résolution de l'exercice 28.

1. Sur calculatrice :

Ti	Casio
Prompt A	"A" : ? $\to A$
$0 \to Q$	$0 \to Q$
$7 \to M$	$7 \to M$
While $M \leqslant A$	While $M \leqslant A$
$Q+1 \to Q$	$Q+1 \to Q$
$M+7 \to M$	$M+7 \to M$
End	WhileEnd
If $(A-7*Q)=Q$	If $(A-7\times Q)=Q$
Then	Then "OUI"
Disp "OUI"	
Else	Else "NON"
Disp "NON"	
End	IfEnd

2. La sortie sera OUI pour tous les entiers tels que dans la division par 7 le quotient est égal au reste, c'est à dire les entiers a tels que $a=7q+r$ avec $0 \leqslant r \leqslant 6$ et $q=r$, ce sont les entiers a s'écrivant $8q$ où q parcourt $\{0;1;2;3;4;5;6\}$. La réponse est NON pour tout autre entier. □

Résolution de l'exercice 29.

1. Traduction de l'énoncé.
   On cherche les entiers naturels a vérifiant :
$$\begin{cases} 400 \leqslant a \leqslant 500 \\ \text{Il existe } q \in \mathbb{N} \text{ tel que } a = 23q+5 \end{cases}$$
2. Méthode Machine.

Traitement	Pour n prenant les valeurs entières de 400 à 500 si la division de n par 23 a pour reste 5 alors afficher la valeur de n

Traitement	Pour n prenant les valeurs entières de 400 à 500 Si $n-23\times E\left(\dfrac{n}{23}\right)=5$ alors afficher la valeur de n

Ti	Casio
For(N,400,500)	For $400 \to N$ To 500
If $N-23*\text{int}\,(N/23)=5$	If $N-23\times \text{intg}\,(N\div 23)=5$
Then	Then N◢
Disp N	
Pause	
End	IfEnd
End	Next

3. Méthode 2.
On restreint la recherche en déduisant un encadrement de q de l'encadrement de a.

$$400 \leqslant 23q + 5 \leqslant 500 \Leftrightarrow 18 \leqslant q \leqslant 21$$ □

Quatre solutions : 419 ; 442 ; 465 ; 488.

Résolution de l'exercice 30.

1. Algorithme :

Entrée	un entier naturel $n > 1$
Traitement	Pour u prenant les valeurs entières de 1 à $\sqrt{n}$ si u divise n alors afficher u et $v = \dfrac{n}{u}$
Sortie	faite au fur et à mesure du traitement

Entrée	un entier naturel $n > 1$
Traitement	Pour u prenant les valeurs entières de 1 à $\sqrt{n}$ si $E\left(\dfrac{n}{u}\right) = \dfrac{n}{u}$ alors afficher u et $\dfrac{n}{u}$
Sortie	faite au fur et à mesure du traitement

Ti	Casio
Prompt N For(U, 1, int($\sqrt{(N)}$)) If int(N/U)=N/U Then Disp U Disp N/U Disp " " Pause End End	"N" : ? $\rightarrow N$ For 1 $\rightarrow U$ To Intg($\sqrt{N}$) If Intg(N÷U)=N÷U Then U◢ N÷U◢ " " IfEnd Next

(a) Pour $n = 63$: ⋄ $1; 63$ ⋄ $3; 21$ ⋄ $7; 9$

(b) Pour $n = 304$: ⋄ 1 ; 304 ⋄ 2 ;152 ⋄ 4 ;76 ⋄ 8 ;38 ⋄ 16 ;19

2. Le dividende est a et le reste 15. Le diviseur b et le quotient q sont donc tels que $bq = a - 15$ et $15 < b$. On recherche donc les couples de diviseurs de $a - 15$ avec la condition « diviseur strictement plus grand que 15 » pour être qualifié de diviseur dans la division euclidienne.

Entrée	un entier naturel $a > 15$
Traitement	Affecter à n la valeur $a - 15$ Pour u prenant les valeurs entières de 1 à $\sqrt{n}$ si u divise n alors si $u > 15$ alors afficher diviseur=u, quotient=$\dfrac{n}{u}$ si $\dfrac{n}{u} > 15$ alors afficher diviseur=$\dfrac{n}{u}$, quotient=u
Sortie	faite au fur et à mesure du traitement

Ti	Casio
Prompt A $A-15 \to N$ For(U,1,int($\sqrt{(N)}$)) If int(N/U)=N/U Then If $U > 15$ Then Disp " diviseur", U Disp "quotient", N/U Disp " " Pause End If $N/U > 15$ Then Disp " diviseur", N/U Dips "quotient", U Disp " " Pause End End End	"A" : ?→ A $A-15 \to N$ For 1→U To intg($\sqrt{N}$) If intg(N÷U)=N÷U Then If $U > 15$ Then "diviseur": U◢ "quotient": N÷U◢ " " IfEnd If $N \div U > 15$ Then "diviseur": N÷U◢ "quotient": U◢ " " IfEnd IfEnd Next

(a) Pour l'entrée 78, la sortie est :
diviseur : 63 quotient : 1
diviseur : 21 quotient : 3

(b) Pour l'entrée 319, la sortie est :
diviseur : 304 quotient : 1
diviseur : 152 quotient : 2
diviseur : 76 quotient : 4
diviseur : 38 quotient : 8
diviseur : 16 quotient : 19
diviseur : 19 quotient : 16

Intérêt des valeurs numériques choisies pour tester le programme :

* Avec 63 : un couple de diviseurs disparaît complètement (les deux diviseurs sont inférieurs à 15).
* Avec 304 : un couple apparaît deux fois (les deux diviseurs sont strictement plus grands que 15). □

Résolution de l'exercice 31.

1. (a) sortie : 2
   (b) sortie : 0
   (c) La sortie est le reste dans la division de n par 11. On a en effet enlever 11 « autant de fois que possible ».
   (d) u est le reste de la division de n par 11 : $n = 11q + u$. Donc $n - u = 11q$ et la sortie avec l'entrée $n - u$ sera 0.
   (e) Algorithme 1 :

Ti	Casio
Input "N ?",N	"N" : ?⟶ N
$N \longrightarrow U$	$N \longrightarrow U$
While $U \geqslant 11$ $U-11 \longrightarrow U$ End	While $U \geqslant 11$ $U-11 \longrightarrow U$ WhileEnd
Disp U	U

2. (a) 2 112

(b) 1 221

(c) $m = \overline{baab} = 10^3 b + 10^2 a + 10a + b$

(d) $10^3 b + 10^2 a + 10a + b = 1001b + 110a = 11\left(91b + 10a\right)$, la sortie de l'algo 2 est donc toujours un multiple de 11.

(e) Algorithme 2 :

Ti	Casio
Input "A ?",A	"A" : ?$\longrightarrow A$
Input "B ?",B	"B" : ?$\longrightarrow B$
$A + 10 * B \longrightarrow U$	$A + 10 \times B \longrightarrow U$
$B + 10 * A \longrightarrow V$	$B + 10 \times A \longrightarrow V$
$V + 100 * U \longrightarrow M$	$V + 100 \times U \longrightarrow M$
Disp M	M

□

Résolution de l'exercice 32.
Nombre de diviseurs de l'entier donné en entrée. □

V Algorithme de multiplication

Résolution de l'exercice 33.

1. $q = E\left(\dfrac{a}{2}\right)$, $a = 2q + 1$, $q = \dfrac{a-1}{2}$.
2. *Remarque : les instructions "inutiles" d'affectations de x à a et y à b semblent nécessaires dès qu'on veut faire un travail d'analyse avec les élèves afin qu'ils ne confondent pas la valeur donnée en entrée et la « case mémoire » utilisée pour leur stockage, case mémoire qui peut être modifiée par le traitement des données.*

(a) 7×8

(b) Avec étapes :

Étapes	a	b	m	$ab + m$
1	5	3	0	15
2	2	6	3	15
3	1	12	3	15
4	0	24	15	15

(c) i. Lorsque a est pair ; a est remplacé par $a' = \dfrac{a}{2}$, b par $b' = 2b$ et m par $m' = m$. Après un passage de boucle, on a : $a'b' + m' = \dfrac{a}{2} \times 2b + m = ab + m = xy$.

ii. Lorsque a est impair, a s'écrit $2E\left(\dfrac{a}{2}\right) + 1$ et a est remplacé par $a' = E\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a-1}{2}$, b par $b' = 2b$ et m par $m' = m + b$. On a après le passage de boucle : $a'b' + m' = \dfrac{a-1}{2} \times 2b + m + b = b(a-1) + b + m = ab + m = xy$ □

Ainsi $ab + m$ vaut toujours xy.

(d) Produit des deux entiers donnés en entrée. $ab + m$ vaut toujours xy, or lorsqu'on sort de la boucle, on a $a = 0$ donc $xy = ab + m = m$ à cette étape.
Remarque : il resterait à justifier que la boucle s'arrête dans tous les cas, c'est à dire que a prendra la valeur 0 en un nombre fini d'étapes.

(e) Calculatrices :

Ti	Casio
Prompt A,B	“A” : ? $\to A$
	“B” : ? $\to B$
$0 \to M$	$0 \to M$
While $A > 0$	While $A > 0$
If int$(A/2) \neq A/2$	If Intg$(A \div 2) \neq A \div 2$
Then	Then
$M + B \to M$	$M + B \to M$
End	IfEnd
$2 * B \to B$	$2 \times B \to B$
int$(A/2) \to A$	Intg$(A \div 2) \to A$
End	WhileEnd
Disp M	M

VI Les congruences

VI.1 Congruence de deux entiers relatifs selon un module

Résolution de l'exercice 34.

Algorithme :

Entrée	un entier relatif a, un entier relatif b, un entier naturel non nul m
Traitement	Si $E\left(\dfrac{a-b}{m}\right) = \dfrac{a-b}{m}$ alors afficher OUI sinon afficher NON
Sortie	traitée dans la partie traitement.

Ti	Casio
Prompt A	“A” : ? $\to A$
Prompt B	“B” : ? $\to B$
Prompt M	“M” : ? $\to M$
If int((A-B)/M)=(A-B)/M	If Intg((A-B)÷M)=(A-B)÷M
Then	Then A◢
Disp A,"CONGRU A",B,"MODULO",M	“CONGRU A” : B◢
	“MODULO” : M◢
Else	Else A◢
Disp A,"NON CONGRU A",B,"MODULO",M	“NON CONGRU A” : B◢
	“MODULO” : M◢
End	IfEnd

□

VI.2 Congruences

Résolution de l'exercice 35.

1. (a) -2

   (b) 0

   (c) On enlève 5 tant que $u > 2$ donc la sortie s vérifie $s \leqslant 2$.

   Au départ, on a $u \geqslant 0 > -3$ et lorsque $u > 2$ on enlève 5 à u, on obtient donc une valeur $u' = u - 5$ telle que $u - 5 > 2 - 5$. La sortie est donc toujours strictement plus grande que -3. L'entrée étant un entier auquel on soustrait des entiers, la sortie s est donc un entier et $s > -3$ s'écrit donc $s \geqslant -2$.

   Au départ on a $u = n$ donc $u \equiv n \mod 5$. Pour tout entier u, on a $u \equiv u - 5 \mod 5$. Donc la sortie s vérifie $s \equiv n \mod 5$.

   L'algorithme s'arrête toujours (on finira toujours par obtenir une valeur < 2 en enlevant 5 un assez grand nombre de fois), on prouve ainsi que tout nombre est congru modulo 5 à l'un des entiers de l'ensemble $\mathscr{S}$.

(d) Sur calculatrice :

Ti	Casio
Prompt N $N \to U$ While $U > 2$ $U - 5 \to U$ End Disp U	"N" : ? $\to N$ $N \to U$ While $U > 2$ $U - 5 \to U$ WhileEnd U

2. $1 + 2^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} \equiv 1 + 2^{2007} + (-2)^{2007} + (-1)^{2007} \mod 5$. L'entier est donc multiple de 5. □

Résolution de l'exercice 36.

Algorithme :

Entrée	un entier n
Traitement	affecter à u la valeur n Tant que $u > 3$: | affecter à u la valeur $u - 7$ Fin du tant que
Sortie	la sortie s est la dernière valeur de u

□

VI.3 Des critères de divisibilité en base 10

Résolution de l'exercice 37.

1. Notons u le chiffre des unités de n et D son nombre des dizaines. On a : $n = u + 10D$. D'où $n \equiv u \mod 10$.
2. Le chiffre des unités est compris entre 0 et 9 et $n \equiv u \mod 10$, u est donc le reste dans la division de n par 10. On écrit donc un algorithme donnant le reste dans la division par 10.

Version 1	
Entrée	un entier naturel n
Traitement	Affecter à r la valeur $n - 10 \times E\left(\dfrac{n}{10}\right)$
Sortie	afficher la valeur de r

Version 2	
Entrée	un entier naturel n
Traitement	Affecter à r la valeur n
	Tant que $r \geqslant 10$ | affecter à r la valeur $r - 10$ Fin de la boucle tant que
Sortie	afficher la valeur de r

3. $n = 10D + u$ s'écrit aussi : $n = 2 \times 5 \times a + u$. On a donc $n \equiv u \mod 5$ et $n \equiv u \mod 2$.

Résolution de l'exercice 38.

1. $10 \equiv 1 \mod 3$. Comme tout entier n s'écrit sous la forme $u + 10d + 100c + \dots$ où u est le chiffre des unités de n, d des dizaines, ... on a : $n \equiv S \mod 3$. S et n ont donc même reste dans la division par 3.
2.

Entrée	un entier naturel n

Traitement	Affecter à S la valeur 0
	Tant que $N \neq 0$
	    | affecter à r la valeur $n - 10 \times E\left(\dfrac{n}{10}\right)$
	    | affecter à S la valeur $S + r$
	    | affecter à n la valeur $\dfrac{(n-r)}{10}$

Sortie	afficher S

Ti	Casio
Prompt N $0 \to S$ While $N \neq 0$ $N - 10 * \text{int}(N/10) \to R$ $S + R \to R$ $(N - R)/10 \to N$ End Disp S	"N": ? $\to N$ $0 \to S$ While $N \neq 0$ $N - 10 \times \text{Intg}(N \div 10) \to R$ $S + R \to R$ $(N - R) \div 10 \to N$ WhileEnd S

Résolution de l'exercice 39.

1.
2. $n = 100C + a \equiv a \mod 100$
3. Algorithme :

Version 1	
Entrée	n un entier naturel
Traitement	Affecter à r la valeur $n - 100 \times E\left(\dfrac{n}{100}\right)$
Sortie	afficher la valeur de r

Version 2	
Entrée	n un entier naturel
Traitement	affecter à r la valeur de n Tant que $r \geqslant 100$ affecter à r la valeur $r - 100$ Fin du tant que
Sortie	afficher la valeur de r

□

Résolution de l'exercice 40.

1. La sortie est le reste de la division de n par 4.
2. La première boucle donne le reste de la division de n par 100. Notons r ce reste. La seconde boucle donne le reste de la division de r par 4. En notant C le nombre des centaines de n, on a $n = 100C + r = 4 \times 25C + r$ donc $n \equiv r \mod 4$. Donc n et r ont bien même reste dans une division par 4.
3. (a) Avec l'algorithme 1 : 101 soustractions.
   (b) Avec l'algorithme 2 : 5 soustractions. □
4. Le 2 est plus rapide pour toute entrée $\geqslant 100$. Le nombre de soustractions est le même pour toute entrée < 100.
5. Nombre de soustractions :

Algorithme 1	
Entrée	N un entier naturel
Traitement	affecter à C la valeur 0 affecter à R la valeur N

	Tant que $R \geqslant 4$:
	    Affecter à R la valeur $R - 4$
	    affecter à C la valeur $C + 1$

Sortie	afficher la valeur de R et la valeur de C

Algorithme 2	
Entrée	N un entier naturel
Traitement	affecter à C la valeur 0 affecter à R la valeur N

	Tant que $R \geqslant 100$:
	    Affecter à R la valeur $R - 100$
	    affecter à C la valeur $C + 1$

	Tant que $R \geqslant 4$:
	    Affecter à R la valeur $R - 4$
	    affecter à C la valeur $C + 1$

Sortie	afficher la valeur de R et la valeur de C

6. | Algorithme 2 | |
|---|---|
| Ti | Casio |
| Prompt N
$N \to R$
While $R \geqslant 100$
$R - 100 \to R$
End
While $R \geqslant 4$
$R - 4 \to R$
End
Disp R | "N" : ? $\to N$
$N \to R$
While $R \geqslant 100$
$R - 100 \to R$
WhileEnd
While $R \geqslant 4$
$R - 4 \to R$
WhileEnd
R |

   et avec compteur de soustractions :

Algorithme 2 avec compteur de soustractions	
Ti	Casio
Prompt N $0 \to C$ $N \to R$ While $R \geqslant 100$ $R - 100 \to R$ $C + 1 \to C$ End While $R \geqslant 4$ $R - 4 \to R$ $C + 1 \to C$ End Disp R Disp C	"N" : ? $\to N$ $0 \to C$ $N \to R$ While $R \geqslant 100$ $R - 100 \to R$ $C + 1 \to C$ WhileEnd While $R \geqslant 4$ $R - 4 \to R$ $C + 1 \to C$ WhileEnd R◢ C

7. Le même procédé convient pour les mêmes raisons.
8. Le nombre constitué des deux derniers chiffres de n est le reste r dans la division de n par 100. On a donc $n = 100q + r$. Soit d un diviseur (positif) de 100. On a : $n = d \times k \times q + r$. Donc $n \equiv r \mod d$. Ainsi tout diviseur (positif) de 100 convient (par exemple : 4 ; 25 ; 2 ; 50 ; 5 ; 20 ; 10).

Résolution de l'exercice 41.

1. (a) sortie 7.
   (b) sortie 9.
   (c) sortie : chiffre des unités de N.
   (d) Sur calculatrice :

Algorithme 1	
Ti	Casio
Prompt N $N \to U$ While $U \geqslant 10$ $U - 10 \to U$ End Disp U	"N" : ? $\to N$ $N \to U$ While $U \geqslant 10$ $U - 10 \to U$ WhileEnd U

2. (a) 52
   (b) 2
   (c) Nombre des dizaines
   (d) Calculatrices :

Ti	Casio
Program A	=A=
$N \to U$ While $U \geqslant 10$ $U - 10 \to U$ End	$N \to U$ While $U \geqslant 10$ $U - 10 \to U$ WhileEnd

Ti	Casio
Program B	=B=
Prompt N prgmA $(N - U)/10 \to N$ Disp N	"N": ? $\to N$ Prog "A" $(N - U) \div 10 \to N$ N

3. (a)
   (b)
   (c)
   (d)
4.
5. La sortie de l'algorithme 3 est $S = u - d + c - m$. Par ailleurs $n = 1000m + 100c + 10d + u$. Or $1 \equiv 1 \mod 11$, $10 \equiv (-1) \mod 11$, $100 = 10^2 \equiv (-1)^2 \mod 11$ soit $100 \equiv 1 \mod 11$, $1000 = 10^3 \equiv (-1)^3 \mod 11$ soit $1000 \equiv -1 \mod 11$. On a donc $n \equiv u - d + c - m \mod 11$ soit $n \equiv S \mod 11$.
6. L'algorithme 4 donne le reste de la division de S par 11 pour $S \geqslant 0$. Il nous faut règler le cas des sommes négatives :

Algorithme 4 bis	
Entrée	n un entier naturel
Traitement	affecter à S la valeur de sortie du sous-programme 3 affecter à r la valeur de S
	Tant que $r \geqslant 11$ affecter à r la valeur $r - 11$
	Tant que $r < 0$ affecter à r la valeur $r + 11$
Sortie	afficher la valeur de r

Ti	Casio
Program A	=A=
$N \to U$ While $U \geqslant 10$ $U - 10 \to U$ End	$N \to U$ While $U \geqslant 10$ $U - 10 \to U$ WhileEnd

Ti	Casio
Program B	=B=
prgmA $(N - U)/10 \to N$	Prog "A" $(N - U)/10 \to N$

Ti	Casio
Program C	=C=
$0 \to S$ $1 \to Z$ While $N \neq 0$ prgmB $S + Z * U \to S$ $-Z \to Z$ End	$0 \to S$ $1 \to Z$ While $N \neq 0$ Prog "B" $S + Z \times U \to S$ $-Z \to Z$ WhileEnd

Ti	Casio
Program D	=D=
Prompt N prgmC $S \to R$ While $R \geqslant 11$ $R - 11 \to R$ End Disp R	"N": ? $\to N$ Prog "C" $S \to R$ While $R \geqslant 11$ $R - 11 \to R$ WhileEnd R

Ti	Casio
Program Dbis	=Dbis=
Prompt N prgmC $S \to R$ While $R \geqslant 11$ $R - 11 \to R$ End While $R < 0$ $R + 11 \to R$ End Disp R	"N": ? $\to N$ Prog "C" $S \to R$ While $R \geqslant 11$ $R - 11 \to R$ WhileEnd While $R < 0$ $R + 11 \to R$ WhileEnd R

□

VI.4 Clefs de contrôle

Résolution de l'exercice 42.

1.

2.

3.

4. (a)

(b) P est la somme : chiffre des unités + chiffres des centaines + ...

Si $n = \sum_{i=0}^{k} \left(a_i \times 10^i\right)$, alors la sortie P est $\sum_{i=0}^{k} a_{\text{indice pair}}$.

En d'autres termes, P est la somme des chiffres de n qui sont coefficients de 10^i avec i pair (dans l'écriture de n en base 10).

(c) Sur calculatrice :

Ti	Casio
ProgramA	=A=
$M - 10 * \text{int}\,(M/10) \to U$ $(M-U)\,/10 \to M$	$M - 10 \times \text{Intg}\,(M \div 10) \to U$ $(M-U) \div 10 \to M$

Ti	Casio
ProgramB	=B=
Prompt N $0 \to P$ $N \to M$ While $M \neq 0$ prgmA $P + U \to P$ prgmA End Disp P	"N": ? $\to N$ $0 \to P$ $N \to M$ While $M \neq 0$ Prog "A" $P + U \to P$ Prog "A" WhileEnd P

□

5. Algorithme :

Entrée	un entier naturel n

Traitement	affecter la valeur 0 à Q
	affecter la valeur de n à m
	Tant que $m \neq 0$:
	  affecter à u le chiffre des unités de m
	  remplacer m par $\dfrac{m-u}{10}$
	  affecter à u le chiffre des unités de m
	  remplacer m par $\dfrac{m-u}{10}$
	  affecter à Q la valeur $Q + u$

Sortie	afficher la valeur de Q

Sur calculatrice :

Ti	Casio
ProgramA	=A=
$M - 10 * \text{int}\,(M/10) \to U$ $(M-U)\,/10 \to M$	$M - 10 \times \text{Intg}\,(M \div 10) \to U$ $(M-U) \div 10 \to M$

Ti	Casio
ProgramC	=C=
Prompt N $0 \to Q$ $0 \to M$ While $M \neq 0$ prgmA prgmA $Q + U \to Q$ End Disp Q	"N": ? $\to N$ $0 \to Q$ $0 \to M$ While $M \neq 0$ Prog"A" Prog "A" $Q + U \to Q$ WhileEnd Q

6. Un algorithme de contrôle de validité d'un code-barre :

Entrée	un code-barre, c'est à dire un entier n de 13 chiffres
Traitement	Affecter à P la sortie du programme B Affecter à Q la sortie du programme C Affecter à T la valeur $3Q + P$ Vérifier que la valeur de T est congrue modulo 10 à 0

Ti
Program A
$M-10*\text{int}\,(M/10) \to U$
$(M-U)\,/10 \to M$

Ti
Program P
$0 \to P$
$N \to M$
While $M \neq 0$
prgmA
$P+U \to P$
prgmA
End

Ti
Program Q
$0 \to Q$
$N \to M$
While $M \neq 0$
prgmA
prgmA
$Q+U \to Q$
End

Ti
Program TEST
Prompt N
prgmP
prgmQ
$3*Q+P \to T$
If $T-10*\text{int}\,(T/10)=0$
Then
Disp “OK”
Else
Disp “ ERREUR”
End

Casio
= A =
$M-10\times\text{Intg}\,(M\div 10) \to U$
$(M-U)\div 10 \to M$

Casio
= P =
$0 \to P$
$N \to M$
While $M \neq 0$
Prog “A”
$P+U \to P$
Prog “A”
WhileEnd

Casio
= Q =
$0 \to Q$
$N \to M$
While $M \neq 0$
Prog “A”
Prog “A”
$Q+U \to Q$
WhileEnd

Casio
= TEST =
“N”: ? $\to N$
Prog “P”
Prog “Q”
$3\times Q+P \to T$
If $T-10\times\text{Intg}\,(T\div 10)=0$
Then “OK”
Else “ ERREUR”
IfEnd

7. Un algorithme de calcul de la clef d'un code d'identification :

Entrée	un code d'identification, c'est à dire un entier n de 12 chiffres
Traitement	Affecter à P la sortie du programme B Affecter à Q la sortie du programme C Affecter à T la valeur $3P+Q$ affecter à r le reste de la division de T par 10 Si $r \neq 0$ alors affecter à r la valeur $-r+10$

Ti
Program A
$M-10*\text{int}\,(M/10) \to U$
$(M-U)\,/10 \to M$

Ti
Program P
$0 \to P$
$N \to M$
While $M \neq 0$
prgmA
$P+U \to P$
prgmA
End

Ti
Program Q
$0 \to Q$
$N \to M$
While $M \neq 0$
prgmA
prgmA
$Q+U \to Q$
End

Ti
Program TEST
Prompt N
prgmP
prgmQ
$3*P+Q \to T$
$T-10*\text{int}\,(T/10) \to R$
If $R \neq 0$
Then
$-R+10 \to R$
End
Disp R

Casio
= A =
$M-10\times\text{Intg}\,(M\div 10) \to U$
$(M-U)\div 10 \to M$

Casio
= P =
$0 \to P$
$N \to M$
While $M \neq 0$
Prog “A”
$P+U \to P$
Prog “A”
WhileEnd

Casio
= Q =
$0 \to Q$
$N \to M$
While $M \neq 0$
Prog “A”
Prog “A”
$Q+U \to Q$
WhileEnd

Casio
= TEST =
“N”: ? $\to N$
Prog “P”
Prog “Q”
$3\times P+Q \to T$
$T-10\times\text{Intg}\,(T\div 10) \to R$
If $R \neq 0$
Then $-R+10 \to R$
IfEnd
R

Résolution de l'exercice 43.

1. La clef est 7 (ISBN de « ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES EN L »).
2. Clef : X
3. Méthode de calcul de la clef :
   * Si les 9 chiffres d'identification sont $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8C_9$, on calcule $S = 10 \times C_1 + 9 \times C_2 + 8 \times C_3 + 7 \times C_4 + 6 \times C_5 + 5 \times C_6 + 4 \times C_7 + 3 \times C_8 + 2 \times C_9$.
   * On calcule alors le reste r de la division de S par 11.
   * Si $r = 0$, la clef est 0. Si $r = 1$, la clef est X. Si $1 < r \leqslant 10$, la clef est $11 - r$.
   * Sur calculatrice :

Ti	Casio
Prompt N $0 \to S$ $2 \to C$	"N" : ? $\to N$ $0 \to S$ $2 \to C$
For(J,1,9) $N - 10 *_t extint(N/10) \to U$ $S + C * U \to S$ $C + 1 \to C$ $(N - U)/10 \to N$ End $S - 11 * \text{int}(S/11) \to R$	For $1 \to J$ To 9 $N - 10 \times \text{Intg}(N \div 10) \to U$ $S + C \times U \to S$ $C + 1 \to C$ $(N - U) \div 10 \to N$ Next $S - 11 \times \text{Intg}(S \div 11) \to R$
If $R = 0$ Then Disp R End If $R = 1$ Then Disp "X" End If R>1 Then Disp 11-R End	If $R = 0$ Then R◢ IfEnd If $R = 1$ Then "X" IfEnd If R>1 Then 11-R◢ IfEnd

VII Écriture décimale d'un réel

Résolution de l'exercice 44.

1. (a) Algorithme :

Entrée	un réel $A > 0$ et un entier $N > 0$
Traitement	calculer l'entier d et les chiffres a_i tels que $\sqrt{A} = d + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots$
Sortie	La partie entière et les N premiers chiffres après la virgule de l'écriture décimale de $\sqrt{A}$

Entrée	un réel $A > 0$ et un entier $N > 0$
Traitement	Affecter la valeur 0 à r Pour j prenant les valeurs entières de 0 à N Affecter la valeur 0 à i Tant que $\left(r + \dfrac{i}{10^j}\right)^2 \leqslant A$: $i + 1 \to i$ Fin du « tant que » Affecter la valeur $r + \dfrac{i-1}{10^j}$ à r Fin de la boucle « Pour »
Sortie	Afficher la valeur de r

(b) Sur calculatrice :

Ti	Casio
Prompt A	"A": ? $\to A$
Prompt N	"N": ? $\to N$
$0 \to R$	$0 \to R$
For(J,0,N)	For $0 \to J$ To N
$0 \to I$	$0 \to I$
While $\left(R + I/10^J\right)^2 \leqslant A$	While $\left(R + I \div 10^J\right)^2 \leqslant A$
$I + 1 \to I$	$I + 1 \to I$
End	WhileEnd
$R + (I-1)/10^J \to R$	$R + (I-1) \div 10^J \to R$
End	Next
Disp R	R

2. (a) Algorithme :

Entrée	un entier $a > 0$, un entier $n > 0$
Traitement	Affecter à u la valeur $\dfrac{a}{2}$ Pour i prenant les valeurs entières de 1 à n : affecter à u la valeur $\dfrac{1}{2}\left(u + \dfrac{a}{u}\right)$ Fin de la boucle « pour »
Sortie	afficher la valeur de u

Sur calculatrice :

Ti	Casio
Prompt A,N	"A" : ? $\to A$
	"N" : ? $\to N$
$A/2 \to U$	$A \div 2 \to U$
For(I,1,N)	For $1 \to I$ To N
$1/2 * (U + A/U) \to U$	$1/2 \times (U + A \div U) \to U$
End	Next
Disp U	U

$\square$

Résolution de l'exercice 45.

1. 10^j : une oe ; $\dfrac{i}{10^j}$: deux oe ; $r + \dfrac{i}{10^j}$: trois ; $\left(r + \dfrac{i}{10^j}\right)^2$: quatre ; comparaison avec A : 5 ; ajouter 1 à i : 6 (sauf au dernier passage).
2. en gros : +4 oe
3. 3 oe
4. Non. Pb de la rapidité de convergence.
5. Modifications :

Entrée	un réel $a > 0$
Traitement	Affecter la valeur 0 à r affecter la valeur 0 à C *(C : compteur d'opérations)* Tant que $r - \sqrt{a} \neq 0$: Affecter la valeur 0 à i Tant que $\left(r + \dfrac{i}{10^j}\right)^2 \leqslant a$: affecter à i la valeur $i+1$ affecter à C la valeur C+6 (on oublie en fait ainsi le dernier test) Fin de boucle « tant que » Affecter la valeur $r + \dfrac{i-1}{10^j}$ à r Affecter à C la valeur C+4 Fin de boucle « tant que »
Sortie	Afficher la valeur de r

Ti	Casio
Prompt A	"A": ? $\to A$
$0 \to R$	$0 \to R$
$0 \to C$	$0 \to C$
While $R - \sqrt{A} \neq 0$	While $R - \sqrt{A} \neq 0$
$0 \to I$	$0 \to I$
While $\left(R + I/10^J\right)^2 \leqslant A$	While $\left(R + I \div 10^J\right)^2 \leqslant A$
$I + 1 \to I$	$I + 1 \to I$
$C + 6 \to C$	$C + 6 \to C$
End	WhileEnd
$R + (I-1)/10^J \to R$	$R + (I-1) \div 10^J \to R$
$C + 4 \to C$	$C + 4 \to C$
End	WhileEnd
Disp C	C

Entrée	un entier $a > 0$
Traitement	Affecter à u la valeur $\dfrac{a}{2}$ affecter à C la valeur 0 Tant que $u - \sqrt{a} \neq 0$: affecter à u la valeur $\dfrac{1}{2}\left(u + \dfrac{a}{u}\right)$ affecter à C la valeur $C+3$ Fin de la boucle « tant que »
Sortie	afficher la valeur de C

Ti	Casio
Prompt A	"A" : ? $\to A$
$A/2 \to U$	$A \div 2 \to U$
$0 \to C$	$0 \to C$
While $U - \sqrt{A} \neq 0$	While $U - \sqrt{A} \neq 0$
$1/2 * (U + A/U) \to U$	$1/2 \times (U + A \div U) \to U$
$C + 3 \to C$	$C + 3 \to C$
End	WhileEnd
Disp C	C

$\square$

Résolution de l'exercice 46.

1. Décomposition suivant les puissances de 10 :
$\dfrac{39169}{2000} = 19{,}584\,5 = 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}$ soit 1 dizaine+9 unités+5 dixièmes+8 centièmes+….
   (a) Sortie : $0; 4; 0; 0; 0; 0$
   (b) Sortie : $1; 2; 8; 5; 7; 1; 4; 2$
   (c) Avec l'entrée $A = 2; B = 5$:
      * $A = 0 \times 5 + 2$. On affiche 0. $R = 2$
      * $A = 20$, $A = 4 \times 5 + 0$. On affiche 4. $R = 0$.
      * $A = 0$, $A = 0 \times 0 + 0$.On affiche 0. $R = 0 \dots$

   Autre écriture :
   $A = 0 \times B + 2 = 0 \times B + 20 \times \dfrac{1}{10} = 0 \times B + (4 \times B + 0) \times \dfrac{1}{10} = 0 \times B + 4 \times \dfrac{1}{10} \times B + 0 \times \dfrac{1}{10} = B\left(0 + 4 \times \dfrac{1}{10}\right)$
   Avec $A = 9$, $B = 7$:
   $A = 1 \times B + 2 = 1B + 20\dfrac{1}{10} = 1B + (2B+6)\dfrac{1}{10} = B\left(1 + 2\dfrac{1}{10}\right)B + \dfrac{6}{10}$ (d'où $\dfrac{A}{B} = 1 + 2 \times \dfrac{1}{10} + \dfrac{6}{10B} = 1{,}2 + \dfrac{6}{10B}$) $A = B\left(1 + 2\dfrac{1}{10}\right)B + 60 \times \dfrac{1}{100} = B\left(1 + \dfrac{2}{10} + \dfrac{8}{100}\right) + \dfrac{4}{100}$ d'où $\dfrac{A}{B} = 1{,}28\dots$

2. Sur calculatrice :

Ti	Casio
Prompt A	“A”: ? $\to A$
Prompt B	“B”: ? $\to B$
Prompt N	“N”: ? $\to N$
int$(A/B) \to Q$	Intg$(A \div B) \to Q$
$A - B * Q \to R$	$A - B \times Q \to R$
Disp Q	Q◢
Pause	
For$(I$,1,$N)$	For $1 \to I$ To N
$10 * R \to A$	$10 \times R \to A$
int$(A/B) \to Q$	Intg$(A \div B) \to Q$
$A - B * Q \to R$	$A - B \times Q \to R$
Disp Q	Q◢
Pause	
End	Next
Disp “Fin”	“Fin”

□

VIII Exponentielle

Résolution de l'exercice 47.

1.
2.
3.
4. (a)

   (b) $(X,Y) = \left(5 + \dfrac{1}{2^j}, q^{5+\frac{1}{2^j}}\right)$

   Au passage suivant :

   * i prend la valeur $j+1$
   * X prend la valeur $\dfrac{1}{2}(A+B) = \dfrac{1}{2}(5+5+\dfrac{1}{2^j}) = 5 + \dfrac{1}{2^{j+1}}$
   * Y prend la valeur $\sqrt{ZW} = \sqrt{q^5 \times q^{5+\frac{1}{2^j}}} = q^{5+\frac{1}{2^{j+1}}}$

5. Au dernier passage de boucle, i prend la valeur n : $(X,Y) = \left(5 + \dfrac{1}{2^n}, q^{5+\frac{1}{2^n}}\right)$

6. Sur calculatrices :

Ti	Casio
Input “N”, N	“N” : ? $\to N$
Input “Q”, Q	“Q” : ? $\to Q$
$5 \to A$	$5 \to A$
$6 \to B$	$6 \to B$
$Q\hat{}5 \to Z$	$Q\hat{}5 \to Z$
$Q\hat{}6 \to W$	$Q\hat{}6 \to W$
For(I,1,N)	For $1 \to I$ To N
$1/2 * (A+B) \to X$	$1 \div 2 \times (A+B) \to X$
$\sqrt{(ZW)} \to Y$	$\sqrt{(ZW)} \to Y$
$X \to B$	$X \to B$
$Y \to W$	$Y \to W$
End	Next
Disp X	X◢
Disp Y	Y

□

IX Logarithme

Résolution de l'exercice 48.

1. Nombre de chiffres dans le système décimal de l'entier donné en entrée.
2. Sur calculatrice :

Ti	Casio
Prompt N	"N" : ? $\to N$
$0 \to I$	$0 \to I$
While 10$\widehat{\ }I \leqslant N$ $I+1 \to I$ End	While 10$\widehat{\ }I \leqslant N$ $I+1 \to I$ WhileEnd
Disp I	I

3. Modification :

Entrée	Un entier naturel non nul n un entier $b \geqslant 2$
Traitement	Affecter la valeur 0 à i Tant que $b^i \leqslant n$ affecter la valeur $i+1$ à i
Sortie	Afficher la valeur de i

Sur calculatrices :

Ti	Casio
Prompt N Prompt B	"N" : ? $\to N$ "B" : ? $\to B$
$0 \to I$	$0 \to I$
While $B\widehat{\ }I \leqslant N$ $I+1 \to I$ End	While $B\widehat{\ }I \leqslant N$ $I+1 \to I$ WhileEnd
Disp I	I

4. Un entier n de i chiffres vérifie : $10^{i-1} \leqslant n < 10^i$. D'où $(i-1)\ln(10) \leqslant \ln(n) < i\ln(10)$ et $i-1 \leqslant \log(n) < i$. Donc $i-1 = E(\log(n))$ et $i = E(\log(n))+1$.
5. $8^{\left(8^8\right)}$ est inaccessible à une calculatrice. Mais $E\left(8^8\log(8)\right) = 15\,151\,335$ est accessible à la calculatrice.
6. Principe :

Entrée	un entier $n > 0$
Traitement	Déterminer le nombre i de chiffres de l'entier n
Sortie	Afficher $E\left(\dfrac{n}{10^{i-1}}\right)$

Mise en oeuvre sur calculatrice :

Ti	Casio
Prompt N	"N" : ? $\to N$
If $N=0$ Then $0 \to C$ Else int($N/10\widehat{\ }$(int(log(N)))) $\to C$ End	If $N=0$ Then $0 \to C$ Else Intg($N \div 10\widehat{\ }$(Intg(log(N)))) $\to C$ IfEnd
Disp C	C

7. Sur calculatrices :

Ti	Casio
Prompt N	"N" : ? $\to N$
int(log(N)) $\to I$ int($N/10\widehat{\ }I$) $\to C$ $N - C * 10^I \to N$	Intg(log(N)) $\to I$ Intg($N \div 10\widehat{\ }I$) $\to C$ $N - C \times 10^I \to N$
Disp N	N

8. Sur calculatrices :

Ti
PROGRAM REDUIT
$\text{int}(\log(N)) \to I$ $\text{int}(N/10\widehat{\ }I) \to C$ $N - C * 10\widehat{\ }I \to N$

Ti
PROGRAM PRINCIP
Prompt N prgmREDUIT $1 \to J$ Lbl A If $N \neq 0$ Then $\text{int}(\log(N)) \to K$ If $K = (I - 1)$ Then If $\text{int}(N/10\widehat{\ }(\text{int}(\log(N)))) = C$ Then $J + 1 \to J$ prgmREDUIT Goto A End End End Disp J